

**METODO SIMPLIFICADO PARA EL CALCULO DE  
DEFORMACIONES EN LOSAS ARMADAS  
EN DOS DIRECCIONES**

---

**Ing. Fernando A. Perdomo\***

**Resumen:**

Se propone un método alternativo para calcular deformaciones en losas armadas en dos direcciones. El método cumple con las condiciones de servicialidad y resistencia que exige el Reglamento ACI 318-89. Se presentan las ecuaciones para el cálculo de los factores de distribución de carga y se considera la sección agrietada, ilustrando en un ejemplo. Un listado del programa para Lotus 123 completa el trabajo.

**Palabras Claves:**

Losas armadas, deformaciones, teoría de Markus, factores de distribución de carga, esfuerzo de rotura.

---

\* Profesor Area Ingeniería Civil, INTEC.

Según el Reglamento ACI 318–89, Párrafo 9.5, las deformaciones de los elementos estructurales sometidos a flexión deben estar dentro de ciertos límites para asegurar su servicibilidad y resistencia bajo cargas de servicio. Los valores máximos permitidos para las deformaciones calculadas están dados en la tabla 9.5(b) del Reglamento.

En el párrafo 9.5.3.1 el Reglamento presenta las ecuaciones conocidas por todos para el cálculo de los espesores mínimos de losas armadas en dos direcciones, que nos permiten controlar las deformaciones por medio del control de la rigidez del elemento estructural. Sin embargo, en el párrafo 9.5.3.4 el Reglamento nos permite usar espesores menores que los obtenidos por medio de dichas fórmulas, siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones:

a) Las deformaciones calculadas no deben sobrepasar los valores de la tabla 9.5(b)

b) Las deformaciones deben ser calculadas tomando en cuenta el tamaño y la forma de la losa, las condiciones de apoyo y la naturaleza de los empotramientos en los bordes.

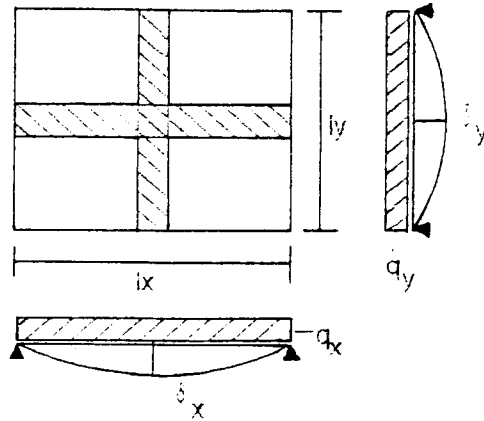
c) El módulo de elasticidad del hormigón  $E_c$  será el especificado en la Sec. 8.5.1 ( $E_c = 15000 \sqrt{f'_c}$ ).

d) El momento de inercia efectivo será el especificado en la Ec. (9–7).

e) Las deflexiones a largo plazo deberán calcularse de acuerdo con la sección 9.5.2.5.

En este trabajo presentamos un procedimiento aproximado que cumple con dichas condiciones.

El procedimiento se basa en la teoría desarrollada por Markus para el cálculo de momentos en losas armadas en dos direcciones, con la que fueron calculados los coeficientes de las tablas para diseño de losas del libro de B. Löser. Presupone que las losas se apoyan sobre apoyos indeformables, que es el caso normal de losas apoyadas sobre muros de bloques.



La teoría de Markus para el cálculo de momentos en losas se basa en el análisis de dos franjas de losa, una en cada dirección, las cuales tienen la misma flecha en su punto de intersección. Igualando las flechas de ambas franjas se determina la carga que debe tener cada franja.

### 1. Cálculo de los factores de distribución de carga:

Igualando las flechas en ambas franjas tendremos:

$$\delta_x = \delta_y$$

$$\frac{W_x \cdot q_x \cdot l_x^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{W_y \cdot q_y \cdot l_y^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Haciendo  $\epsilon = l_y/l_x$  y  $W = W_y/W_x$ :

$$q_x = \frac{W \cdot \epsilon^4}{1 + W \cdot \epsilon^4} \cdot q = k_x \cdot q$$

$$q_y = (1 - k_x) \cdot q = k_y \cdot q$$

Donde  $q$  es la carga sobre la losa para la cual se desea calcular la flecha, y  $q_x$  y  $q_y$  son las cargas que actúan sobre las franjas según  $x$  y según  $y$ , respectivamente.

Al no considerar la rigidez a la torsión de la losa, los resultados serán conservadores, del lado de la seguridad.

En la figura siguiente se dan los coeficientes para el cálculo de las flechas ( $W_{x,y}$ ), los momentos en los tramos ( $mf_{x,y}$ ) y los momentos de empotramiento perfecto ( $ms_{x,y}$ ) para los tres casos de apoyo de cada franja ( $x,y$ ).

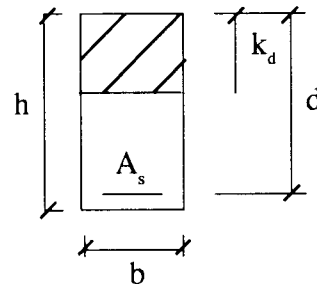
$w_{xy}$	=	5	2.08	1
$mf_{xy}$	=	8	14.22	24
$ms_{xy}$	=	—	8	12

## 2. Sección Agrietada (Según Ref. 2, pag. 8.7):

$$B = \frac{b}{n \cdot A_s} \quad I_g = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$k_d = \frac{\sqrt{2 \cdot d \cdot B + 1} - 1}{B}$$

$$I_{cr} = \frac{b \cdot k_d^3}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - k_d)^2$$



## 3. Momento de Inercia efectivo:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right) \cdot I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{cr} \leq I_g \quad (\text{Ec. 9.7 ACI})$$

Donde:  $M_{cr} = \frac{f_r \cdot I_g}{Y_t}$  Momento de agrietamiento (Ec. 9-8 ACI).

$f_r = 2 \cdot \sqrt{f'_c}$  Esfuerzo de rotura por tracción del hormigón.

$M_a$  = Máximo momento en la zona donde se calcula la deformación

$y_t$  = distancia desde el centro de gravedad de la sección al extremo traccionado.

En el caso de vigas con extremos continuos, el reglamento ACI 318–89 recomienda el uso del valor promedio de los momentos de inercia efectivos en el tramo y en los extremos continuos.

Vigas con un extremo contínuo:

$$I_e \text{ prom.} = 0.50 I_{em} + 0.50 I_{e1}$$

Vigas con ambos extremos contínuos:

$$I_e \text{ prom.} = 0.50 I_{em} + 0.25 (I_{e1} + I_{e2})$$

Donde  $I_{em}$  se refiere a la zona de momento positivo, y  $I_{e1}$ ,  $I_{e2}$  a las zonas sobre los apoyos.

En el caso de las losas, tendremos dos franjas, cada una con su momento de inercia efectivo promedio. Como el cálculo de la distribución de las cargas se basó en que ambas franjas tendrían el mismo momento de inercia, se debe calcular un momento de inercia efectivo común a ambas franjas, que llamaremos  $I_{ep}$ : Momento de Inercia Efectivo Ponderado.

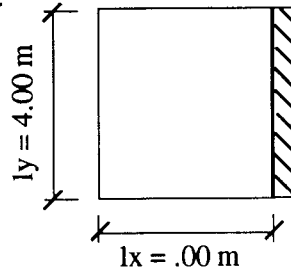
En el caso de una losa con una relación de luces  $l_{max}/l_{min}$  mucho mayor que dos (2), la luz corta resistirá el 100% de la carga, por lo que la rigidez de la losa deberá ser la rigidez de la luz corta. En general, la rigidez de la losa deberá ser proporcional a los factores de distribución de cargas, o sea multiplicando los valores  $I_{eprom.}$  de cada franja por los respectivos factores de distribución de carga  $k_x$  y  $k_y$ .

$$I_{ep} = k_x \cdot I_{ex} \text{ prom.} + k_y \cdot I_{ey} \text{ prom.} + k_y \cdot I_{ey} \text{ prom.}$$

Con este valor  $I_{ep}$ , y con los factores de distribución de cargas  $k_x$  y  $k_y$ , podremos calcular las flechas en ambas franjas, las cuales deberán ser iguales, y serán la flecha aproximada de la losa.

$$\delta_{losa} = \delta_x = \frac{W_x \cdot k_x \cdot q \cdot l_x^4}{384 \cdot E \cdot I_{ep}} = \delta_y = \frac{W_y \cdot k_y \cdot q \cdot l_y^4}{384 \cdot E \cdot I_{ep}}$$

4. Ejemplo de cálculo:



Verificar si el espesor de la losa apoyada sobre muros de bloques cumple con los requisitos de flechas del ACI:

Solicitaciones:

Carga viva:  $L = 200 \text{ kg/m}^2$

Carga muerta adicional:  $D1 = 120 \text{ kg/m}^2$

Espesor losa: 11 cm

Materiales:

$f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$   $E_c = 217371 \text{ kg/cm}^2$

$f_r = 29 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$   $E_s = 2E+06 \text{ kg/cm}^2$   $n = 9.66$

Sección:

$h = 11 \text{ cm}$   $d = 9 \text{ cm}$   $d' = 2 \text{ cm}$

$I_g = 11092 \text{ cm}^4/\text{m}$   $y_t = 5.5 \text{ cm}$

$A_s = 2.20 \text{ cm}^2/\text{m} = A_{smin} = 2.20 \text{ cm}^2/\text{m}$

Solicitaciones:

$$D0 = 264 \text{ kg/m}^2 \quad D1 = 120 \text{ kg/m}^2 \quad L = 200 \text{ kg/m}^2$$

Sistema:

$$l_x = 4.00 \text{ m} \quad l_y = 5.00 \text{ m} \quad \epsilon = 1.25$$

Franja según x: empotrada – articulada

Franja según y: simplemente apoyada

Distribución de cargas:

$$\begin{array}{llll} m_{fx} = 14.22 & m_{sx} = -8 & W_x = 2.08 & K_x = 0.8544 \\ m_{fy} = 8 & m_{sy} = 0 & W_y = 5 & K_y = 0.1456 \end{array}$$

Sección Agrietada:

$$\begin{array}{ll} B = 4.705 & k_d = 1.755 \text{ cm} \\ I_{cr} = 1297 \text{ cm}^4/\text{m} & M_{cr} = 584 \text{ kg.m/m} \end{array}$$

Momento de inercia Efectivo:

$$D0 = 264 \text{ kg/m}^2 \quad D1 = 120 \text{ kg/m}^2 \quad L = 200 \text{ kg/m}^2$$

$$\begin{array}{llll} \text{Tramo:} & \text{Max} = 561 \text{ kg.m/m} & I_{ex} = 11092 \text{ cm}^4/\text{m} \\ & \text{May} = 266 \text{ kg.m/m} & I_{ey} = 11092 \text{ cm}^4/\text{m} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Emp.:} & \text{Max} = -998 \text{ kg.m/m} & I_{ex} = 3265 \text{ cm}^4/\text{m} \\ & \text{May} = 0 \text{ kg.m/m} & I_{ey} = \text{— cm}^4/\text{m} \end{array}$$

$$\text{Promedios: } I_{ex} = 7178 \text{ cm}^4/\text{m} \quad I_{ey} = 11092 \text{ cm}^4/\text{m}$$

$$\text{Promedio ponderado: } I_{ep} = 7748 \text{ cm}^4/\text{m}$$

Flecha máxima inmediata por carga viva:

$$D0= 0 \text{ kg/m}^2 \quad D1= 0 \text{ kg/m}^2 \quad L= 200 \text{ kg/m}^2$$
$$f_x= 0.1407 \text{ cm} \quad f_y= 0.1407 \text{ cm}$$

$$f = 0.141 \text{ cm} \quad L_{\min} / 360 = 1.111 \text{ cm} \quad \text{O.K.}$$

=====

Flecha final máxima por carga total:

Factor para deformación retardada: 2.00  
(Ec. 9-10,  $t > 5$  años)

$$D0= 264 \text{ kg/m}^2 \quad D1= 120 \text{ kg/m}^2 \quad L= 200 \text{ kg/m}^2$$
$$f_x= 0.6810 \text{ cm} \quad f_y= 0.6810 \text{ cm}$$

$$f = 0.681 \text{ cm} \quad L_{\min} / 480 = 0.833 \text{ cm} \quad \text{O.K.}$$

=====

## 5. Conclusiones:

Con ayuda de un sencillo programa (ver listado anexo del programa para Lotus 123) se puede tener a disposición una herramienta práctica para calcular deformaciones en losas armadas en dos direcciones, considerando la sección agrietada, con la que se podrían justificar en algunos casos espesores de losas menores que los requeridos por las ecuaciones (9-10) y (9-11) del reglamento.

## 6. Bibliografía:

1. American Concrete Institute: Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-89) (Revised 1992) and Commentary, 1994.
2. Portland Cement Association: Notes on ACI 318-89 Building Code Requirements for Reinforced Concrete, Fifth edition, 1990.
3. Hormigón Armado  
B. Löser. 8va Edición, 1971. El Ateneo.



## LISTADO DEL PROGRAMA PARA LOTUS 123

A1: ' LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES  
G1: '(Alpha m > 2)  
A2: ' CALCULO DE DEFORMACIONES  
CONSIDERANDO LA SECCION AGRIETADA  
B3: '(Reglamento ACI 318-89, §  
9.5.2.3) I  
A5: 'PROYECTO:  
C5: 'Ejemplo  
A7: 'Materiales:  
B8: "'f'c=  
C8: 210  
D8: 'kg/cm<sup>2</sup>  
E8: "'Ec=  
F8: 15000\* @SQRT(C8)  
G8: 'kg/cm<sup>2</sup>  
B9: "'fr=  
C9: 2\* @SQRT(C8)  
D9: 'kg/cm<sup>2</sup>  
B10: "'fy=  
C10: 2800  
D10: 'kg/cm<sup>2</sup>  
E10: "'Es=  
F10: 2100000  
G10: 'kg/cm<sup>2</sup>  
H10: "'n=  
I10: +F10/F8  
A12: 'Seccion:  
B13: "'h=  
C13: 11  
D13: 'cm  
E13: "'d=  
F13: +C13-I13  
G13: 'cm  
H13: "'d'=  
I13: 2

J13: 'cm  
 B14: "Ig=  
 C14:  $100 \cdot C13^3/12$   
 D14: 'cm<sup>4</sup>/m  
 E14: "yt=  
 F14: +C13/2  
 G14: 'cm  
 B15: "As=  
 C15: +F15  
 D15: 'cm<sup>2</sup>/m  
 E15: "Asmin  
 F15:  
 $+C13 \cdot 100 \cdot @MAX(@IF(C10 < 4200, 0.002, 7.5$   
 $6/C10), 0.0014)$   
 G15: 'cm<sup>2</sup>/m  
 A17: 'Solicitaciones:  
 B18: "D0=  
 C18: +C13\*2400/100  
 D18: 'kg/m<sup>2</sup>  
 E18: "D1=  
 F18: 120  
 G18: 'kg/m<sup>2</sup>  
 H18: "L=  
 I18: 200  
 J18: 'kg/m<sup>2</sup>  
 A20: 'Sistema:  
 B21: "Lx=  
 C21: 4  
 D21: 'm  
 E21: "Ly=  
 F21: 5  
 G21: 'm  
 H21: "Eps=  
 I21: +F21/C21  
 G22: ' ( 1 = Simplemente apoyado)  
 B23: "Tx=  
 C23: 2

E23: "Ty=  
 F23: 1  
 G23: ' ( 2 = Empotrado/articulado)  
 G24: ' ( 3 = Doble empotrado )  
 A25: 'Distribucion de cargas:  
 B26: "Mx=  
 C26:  
 @IF(C23=1,8,@IF(C23=2,14.22,24))  
 D26: "Sx=  
 E26: @IF(C23=1,0,@IF(C23=2,-8,-12))  
 G26: "Wx=  
 H26: @IF(C23=1,5,@IF(C23=2,2.08,1))  
 I26: "Kx=  
 J26: 1-J27  
 B27: "My=  
 C27:  
 @IF(F23=1,8,@IF(F23=2,14.22,24))  
 D27: "Sy=  
 E27: @IF(F23=1,0,@IF(F23=2,-8,-12))  
 G27: "Wy=  
 H27: @IF(F23=1,5,@IF(F23=2,2.08,1))  
 I27: "Ky=  
 J27: 1/((H27/H26)\*I21^4+1)  
 A29: 'Inercia Seccion Agrietada:  
 (PCI: Notes on ACI, pag. 8-7)  
 B30: "B=  
 C30: @IF(C15=0,0,100/(I10\*C15))  
 E30: 'kd=  
 F30:  
 @IF(C30=0,0,(@SQRT(2\*F13\*C30+1)-1)/C  
 30)  
 G30: 'cm  
 B31: "Icr=  
 C31:  
 100\*F30^3/3+I10\*C15\*(F13-F30)^2+(I10  
 -1)\*F15\*(F30-I13)^2  
 D31: 'cm<sup>4</sup>/m

E31: 'Mcr=  
 F31:  $+C9 \cdot C14 / F14 / 100$   
 G31: 'kg.m/m  
 A33: 'Momento de inercia Efectivo  
 F33: '(Ec. 9-7 Reglamento ACI)  
 B34: "D0=  
 C34: +C18  
 D34: 'kg/m<sup>2</sup>  
 E34: "D1=  
 F34: +F18  
 G34: 'kg/m<sup>2</sup>  
 H34: "L=  
 I34: +I18  
 J34: 'kg/m<sup>2</sup>  
 B35: "Tramo:  
 C35: "Max=  
 D35:  $+J26 \cdot (C34 + F34 + I34) \cdot C21^2 / C26$   
 E35: 'kg.m/m  
 F35: "Iex=  
 G35:  
 $@MIN((F31^3 / D35^3) \cdot C14 + (1 - (F31^3 / D35^3)) \cdot C31, C14)$   
 H35: 'cm<sup>4</sup>/m  
 C36: "May=  
 D36:  $+J27 \cdot (C34 + F34 + I34) \cdot F21^2 / C27$   
 E36: 'kg.m/m  
 F36: "Iey=  
 G36:  
 $@MIN((F31^3 / D36^3) \cdot C14 + (1 - (F31^3 / D36^3)) \cdot C31, C14)$   
 H36: 'cm<sup>4</sup>/m  
 B37: "Emp.:  
 C37: "Max=  
 D37:  
 $@IF(E26=0, 0, +J26 \cdot (C34 + F34 + I34) \cdot C21^2 / E26)$   
 E37: 'kg.m/m

F37: "Iex=  
 G37: @IF(D37=0,"  
 —",@MIN((F31^3/(-D37)^3)\*C14+(1-(F3  
 1^3/(-D37)^3))\*C31,C14))  
 H37: 'cm<sup>4</sup>/m  
 C38: "May=  
 D38:  
 @IF(E27=0,0,+J27\*(C34+F34+I34)\*F21^2  
 /E27)  
 E38: 'kg.m/m  
 F38: "Iey=  
 G38: @IF(D38=0,"  
 —",@MIN((F31^3/(-D38)^3)\*C14+(1-(F3  
 1^3/(-D38)^3))\*C31,C14))  
 H38: 'cm<sup>4</sup>/m  
 B39: "Promedios:  
 D39: "Iex=  
 E39: @IF(C23=1,G35,(+G35+G37)/2)  
 F39: 'cm<sup>4</sup>/m  
 G39: "Iey=  
 H39: @IF(F23=1,G36,(+G36+G38)/2)  
 I39: 'cm<sup>4</sup>/m  
 B40: "Promedio ponderado:  
 E40: 'Iep=  
 F40: +E39\*J26+H39\*J27  
 G40: 'cm<sup>4</sup>/m  
 A42: 'Flecha maxima inmediata por  
 carga viva:  
 B43: "D0=  
 C43: 0  
 D43: 'kg/m<sup>2</sup>  
 E43: "D1=  
 F43: 0  
 G43: 'kg/m<sup>2</sup>  
 H43: "L=  
 I43: +I34  
 J43: 'kg/m<sup>2</sup>

B44: "fx=  
 C44:  
 $+J26*(C43+F43+I43)*C21^4/((384/H26)*$   
 $F8*F40)*1000000$   
 D44: 'cm  
 E44: "fy=  
 F44:  
 $+J27*(C43+F43+I43)*F21^4/((384/H27)*$   
 $F8*F40)*1000000$   
 G44: 'cm  
 B46: 'f =  
 C46: @MAX(C44,F44)  
 D46: 'cm  
 E46: 'Lmin / 360 =  
 G46: @MIN(C21,F21)/360\*100  
 H46: 'cm  
 I46: @IF(C46<G46," O.K.", " ERR")  
 B47: \=  
 C47: \=  
 D47: '==  
 I47: \=  
 A49: 'Flecha final maxima por carga  
 total:  
 B50: 'Factor para deformacion  
 retardada:  
 G50: 2  
 H50: ' (Ec. 9-10, t > 5 años)  
 B51: "D0=  
 C51: +C34  
 D51: 'kg/m<sup>2</sup>  
 E51: "D1=  
 F51: +F34  
 G51: 'kg/m<sup>2</sup>  
 H51: "L=  
 I51: +I34  
 J51: 'kg/m<sup>2</sup>  
 B52: "fx=

C52:  

$$+J26*(C51*G50+F51*G50+I51)*C21^4/((384/H26)*F8*F40)*1000000$$
  
 D52: 'cm  
 E52: "fy=  
 F52:  

$$+J27*(C51*G50+F51*G50+I51)*F21^4/((384/H27)*F8*F40)*1000000$$
  
 G52: 'cm  
 B54: 'f =  
 C54: @MAX(C52,F52)  
 D54: 'cm  
 E54: 'Lmin / 480 =  
 G54: @MIN(C21,F21)/480\*100  
 H54: 'cm  
 I54: @IF(C54<G54," O.K.", " ERR")  
 B55: \=  
 C55: \=  
 D55: '==  
 I55: \=