

ANALISIS ESTRUCTURAL DE ELEMENTOS HELICOIDALES
(Momento Torsor Uniforme)

DANIEL COMARAZAMY

El análisis de elementos helicoidales ha sido discutido ampliamente por varios especialistas en diversas revistas técnicas y "journals" del ASCE, especialmente a principios de la década de los años sesenta.

Los profesores V. Bergman¹ y A. Scordelis,² al igual que V. Morgan,³ presentan el análisis de este tipo de estructura pero de una forma muy escueta, ya que se limitan a un elemento aislado y con los extremos empotrados.

El aporte más significativo sobre el tema, lo realiza el Prof. A. Cusens^{4,5,6} con una serie de pruebas de laboratorio y con la confección de varias gráficas de análisis para escaleras helicoidales con variación de radios y ángulos de inclinación de las rampas. Sin embargo, el tema de la excentricidad de cargas no ha sido tratado con amplitud.

Es importante recordar que, en un elemento helicoidal, el eje sobre el cual actúan las cargas no siempre coincide con el eje longitudinal de la sección, por lo que se crea una excentricidad de cargas que origina un Momento Torsor Uniforme. El mismo deberá tomarse en cuenta siempre y cuando la razón de ancho a radio de la escalera sea mayor de un tercio, según lo expresado por el Prof. A. Scordelis.²

Sobre este particular hemos extraído la subrutina DESTOR del programa HELICE, que forma parte de nuestra Tesis de Maestría en Ingeniería de

Estructuras⁷ y que investiga el efecto de la excentricidad en un elemento helicoidal. De igual forma presentamos un ejemplo práctico cuyos resultados comparamos con los obtenidos por A. Scordelis,⁸ relativos a su "discusión" acerca de los trabajos publicados por Cusens.⁴ Como se podrá notar, los resultados presentados en la tabla de comparación, son altamente satisfactorios.

Para el análisis estructural hemos implementado las modernas teorías de los Elementos Finitos⁹ así como los conceptos del álgebra matricial en la ingeniería de estructuras¹⁰ y de los algoritmos computacionales.¹¹ Por otro lado, las teorías estructurales clásicas^{12,13} han sido incorporadas, de manera directa, al presente trabajo.

Desarrollo teórico

Consideremos un elemento estructural y helicoidal con seis grados de libertad por nudo (ver fig. 1-a), con un radio R en planta y cuyo primer nudo coincide con las coordenadas (R,O,O).

Un punto cualquier 'B' contenido en el elemento, tendrá coordenadas cartesianas $x = R\cos\theta$ y $y = R\sin\theta$ $z = P\theta$ donde P representa el paso de rosca ("pitch") que guarda el helicoides cada vez que rota 360° al ganar una altura H, de donde tenemos que $P = H/(2\pi)$.

Ahora bien, si U y V representan ejes perpendicular y paralelo al área de sección, entonces W indicará un eje perpendicular al plano que contiene los dos primeros (ver fig. 2).

El diferencial de longitud del arco helicoidal ds con proyecciones dx, dy, dz, y siendo u el vector unitario a lo largo del eje U, se puede expresar como función de los ejes unitarios i, j, k según

$$ds_u = dx_i + dy_j + dz_k \text{ de donde}$$

$$ds = [dx^2 + dy^2 + dz^2]^{1/2}$$

sustituyendo las derivadas apropiadas:

$$dx = -R\sin\theta d\theta \quad dy = R\cos\theta d\theta \quad dz = P d\theta$$

$$ds = d\theta (R^2 \sin^2\theta + R^2 \cos^2\theta + P^2)^{1/2}$$

simplificando la ecuación anterior y llamando

$$C = [1 + (P/R)^2]^{1/2} \text{ entonces, la longitud del arco será igual a}$$

$$ds = CR d\theta$$

$$\text{de aquí que } (CR d\theta)u = (-R\sin\theta d\theta)i + (R\cos\theta d\theta)j + (Pd\theta)k$$

por lo que el vector unitario a lo largo de U será,

$$u = (-\sin\theta/C)i + (\cos\theta/C)j + (P/CR)k$$

y el vector unitario v paralelo al plano X-Y será

$$v = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$$

si realizamos el producto cruzado $u \times v$ obtenemos

$$w + (-P\sin\theta/CR)i + (P\cos\theta/CR)j - (1/C)k$$

La excentricidad de la carga uniforme, respecto al centro de gravedad del helicoide, se puede determinar de la siguiente manera. Tomando como base la fig. No. 3, y usando un elemento con un ancho "b" tenemos que, el elemento de área $dA = Sdr = \theta r dr$ y llamando G al centro de gravedad del elemento helicoidal, sabemos que $G = R + e$ y como,

$$G = \int r dA / dA$$

$$G = \int r (\theta r dr) / \theta r dr$$

$$G = \int_{R_2}^{R_1} r^2 dr / R_2 r dr$$

$$G = 2(R_2^3 - R_1^3) / [3(R_2^2 - R_1^2)]$$

sustituyendo los valores de $R_1 = R - b/2$ y $R_2 = R + b/2$, tenemos que,

$$G = R + b^2/12R \text{ e igualando se obtiene,}$$

$$R + e = R + b^2/12R$$

de donde $e = b^2/12R$

obviamente el vector unitario a lo largo de dicha excentricidad se puede expresar como:

$$e = e\{(\cos w)i + (\sin w)j\}$$

y el momento torsor como:

$dM_t = -e \times df$ siendo df el vector de fuerzas de la carga 'g' distribuida uniformemente

$$df = [gCRdw]k$$

sustituyendo y efectuando el producto cruzado, se tiene que

$dM_t = (egCR\cos w dw)j - (egCR\sin w dw)i$ integrando y evaluando el resultado desde 0 hasta θ , obtenemos,

$$M_t = egCR[\sin\theta]j - (\cos\theta - 1)i$$

Ahora bien, la proyección de este Momento Torsor Uniforme, a lo largo de los ejes de la sección U, V y W se consigue mediante el producto punto (dot product) de los vectores:

$$M_1 = M_t \cdot v$$

$$M_1 = egCR[\sin\theta j + (\cos\theta i + \sin\theta j)]$$

$$M1 = egCR (1-\cos\theta)$$

$$M2 = M_t \cdot w$$

$$M2 = egCR[\text{sen}\theta j + (\cos\theta - 1)i].P/CR[-\text{sen}\theta i + \cos\theta j]$$

$$M2 = egP\text{sen}\theta$$

$$T = M_t \cdot u$$

$$T = egCR[\text{sen}\theta j + (\cos\theta - 1)i].1/C[-\text{sen}\theta i + \cos\theta j]$$

$$T = egR\text{sen}\theta$$

Los desplazamientos que produce este momento torsor uniforme, pueden ser expresados en función de las fuerzas que los provocan mediante el método de trabajo virtual y la ecuación que define la energía de deformación unitaria. Estos desplazamientos deberán ser añadidos al vector consistente de cargas del elemento helicoidal,

$$q_1 = \int_0^\theta \frac{M1 \partial m_1 ds}{EI_1 \partial Q_1} + \int_0^\theta \frac{M2 \partial m_2 ds}{EI_2 \partial Q_1} + \int_0^\theta \frac{T \partial t ds}{GJ \partial Q_1}$$

donde EI_1 , EI_2 y GJ representan rigideces flexionantes y torsionales. El valor de $J = (1 - 0.63x/y)x^3y/3$ según la norma del ACI 318-83 (13.7.5.3) y recordando que $ds = CRd\theta$

Las derivadas parciales correspondientes, con respecto a cada una de las seis fuerzas se expresa en la tabla siguiente:

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
m1	$-\cos\theta$	$-\text{sen}\theta$	0	$P\theta\text{sen}\theta$	$-P\theta\cos\theta$	$R\text{sen}\theta$
m2	$\frac{P\text{sen}\theta}{CR}$	$-\frac{P\cos\theta}{CR}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{P\theta\cos\theta}{CR} + \frac{R\text{sen}\theta}{C}$	$\frac{P\text{sen}\theta}{CR} + \frac{R(1-\cos\theta)}{C}$	$\frac{P(\cos\theta-1)}{C}$
t	$\frac{\text{Sen}\theta}{C}$	$-\frac{\cos\theta}{C}$	$-\frac{P}{CR}$	$\frac{P(\theta\cos\theta - \text{sen}\theta)}{C}$	$\frac{P(\theta\text{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{C}$	$\frac{R(\cos\theta - 1)}{C}$

Al integrar y evaluar apropiadamente encontramos los desplazamientos ocasionados por la excentricidad, considerándose la misma positiva si actúa centrífugamente y negativa si es centrípeta.

$$\begin{aligned}
& [C^2R^2/EI_1 + P^2/EI_2 + R^2/GJ]eg\theta/2 - \\
& - C^2R^2eg\text{sen}\theta/EI_1 + \\
& + [C^2R^2/EI_1 - P^2/EI_2 - R^2GJ]eg\text{sen}^2\theta/4
\end{aligned}$$

$$qt2 = [C^2R^2/EI_1 - P^2/EI_2 - R^2/GJ]egsen^2\theta/2 + \\ + C^2R^2eg(\cos\theta - 1)/EI_1$$

$$qt3 = [RP/EI_2 - RP/GJ]eg(1 - \cos\theta)$$

$$qt4 = [PC^2TR^2/EI_1 - P^3/EI_2 - PR^2/GJ]eg\theta\cos2\theta/4 + \\ + [-PC^2R^2/EI_1 + P^3/EI_2 + PR^2/GJ]egsen2\theta/8 + \\ + [R^2P/EI_2 - R^2P/GJ]eg(2\theta - \sin2\theta)/4 + \\ + PC^2R^2eg[\sin\theta - \theta\cos\theta]EI_1$$

$$qt5 = [PC^2R^2/EI_1 + P^3/EI_2 + PR^2/GJ]\theta^2eg/4 + \\ + [PC^2R^2/EI_1 - P^3/EI_2 - PR^2/GJ]\theta\sin2\theta eg/4 + \\ + [PC^2R^2/EI_1 + PR^2/EI_2 - PR^2/GJ]eg(1 - \cos\theta) + \\ + [-C^2R^2/EI_1 + P^2/EI_2 - 2R^2/EI_2 + \\ + 3R^2/GJ]P\sin2\theta eg/4 - PC^2R^2eg(\theta\sin\theta)/EI_1$$

$$qt6 = [-C^2R^3/EI_1 + RP^2/EI_2 + R^3/GJ](\sin^2\theta/2 - 1 + \cos\theta)eg$$

reagrupando términos y llamando

$$G1 = C^2R^2/EI_1 \quad G2 = P^2/EI_2$$

$$G3 = R^2/GJ \quad G4 = (PR/EI_2 - PR/GJ)$$

y a la vez, añadiendo los términos de desplazamiento que se producen en la dirección de los grados de libertad propios del elemento, tenemos que,

$$qt1 = (G1 + G2 + G3)eg\theta/2 + (G1 - G2 - G3)egsen2\theta/4 - Gi(egsen\theta)$$

$$qt2 = (G1 - G2 - G3)egsen^2\theta/2 + G1[eg(\cos\theta - 1)]$$

$$qt3 = G4[eg(1 - \cos\theta)]$$

$$qt4 = Peg[G1 - G2 - G3][2\theta\cos2\theta - \sin2\theta]/8 + RegG4[2\theta - \sin2\theta]/4 + \\ + PegG1[\sin\theta - \theta\cos\theta]$$

$$qt5 = Peg[G1 + G2 + G3]\theta^2/4 + Peg[G1 - G2 - G3]\theta\sin2\theta/4 + \\ + [PG1 + RG4]eg(1 - \cos\theta) - [P(G1 - G2 - G3) + 2RG4]egsen2\theta/4$$

$$qt6 = Reg[G1 - G2 - G3][1 - \cos\theta - \sin^2\theta/2]$$

$$qt7 = RCeg(\cos\theta - 1)$$

$$qt8 = RCegsen\theta$$

El ejemplo que se presenta, ha sido tomado de un "discussion" del Prof. A. Scordelis (8) sobre un trabajo realizado por el Prof. A. R. Cusens (4) publicado por el *journal* del ACI en el 1964. La convención de signos para la interpretación de la salida del programa HELICE, se ilustra en la fig. 1-b.

El mismo está acompañado de los diagramas de cortante y momento (fig. 4) y de un diseño (fig. 5) que, aunque no está acorde con las modernas teorías estructurales, se hizo con la finalidad de compararlo con el presentado por A. Cusens. En nuestra opinión, se debe tomar en consideración el efecto de la flexocompresión que ocurre en el elemento.

A continuación presentamos la subrutina DESTOR que acompaña al programa HELICE escrito en lenguaje FORTRAN.

```

c
c
      subroutine destor (g,p,e,r,ei1,ei2, gj, fi, ft, c)
      dimensión ft(8)

c
c argumentos:
c g --- carga uniformemente distribuida
c p ---  $h/(2)$  [ h = paso de rosca ]
c e --- excentricidad
c r - ei2 - gj rigideces flexionante y torsional
c fi --- ángulo del helicoides en planta
c ft --- valor del desplazamiento debido al torsor uniforme
c c --- factor de amplificación del arco del helicoides
c ---  $c = [1 + (p/r^2)]^{1/2}$ 
      fi2 = fi*fi
      s1 = sin(fi)
      s2 = sin(2.*fi)
      s22 = s1*s1
      co1 = cos(fi)
      co2 = cos(2.*fi)
      g1 = e*g*c*r/ei1
      g2 = e*g*p/ei2
      g3 = e*g*r/gj
      g4 = e*g*(p*r/ei2-p*r/gj)
      g5 = g1 + g2 + g3
      g6 = g1-g2-g3
      ft(1) = g5*f1/2. + g6*s2/4.-g1*s1
      ft(2) = g6*s22/2. + g1*(co1-1.)
      ft(3) = g4*(1.-co1)
      ft(4) = g6*p*(fi*co2/4.-s/8.) + g4*r*(fi/2.-s2/4.) + g1*p*(s1-fi*co1)
      ft(5) = g5*p*fi2/4/ + g6*p*fi*s2/4. + (g1*p + g4*r)*(1.-co1)-(g6*p + 2
      .*r*g4)*s22/4.-g1*p*fi*s1
      ft(6) = g6*r*(1.co1-s22/2.)
      ft(7) = g*c*r*e*(co1-1.)
      ft(8) = g*r*c*e*s1
      return
      end

```

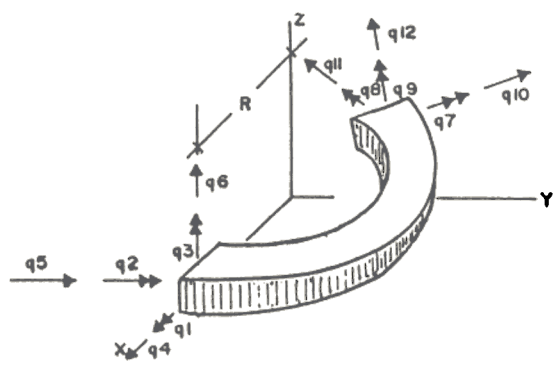


Fig 1-a

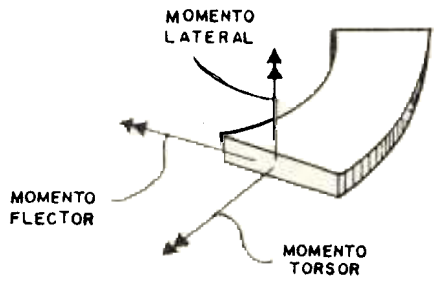
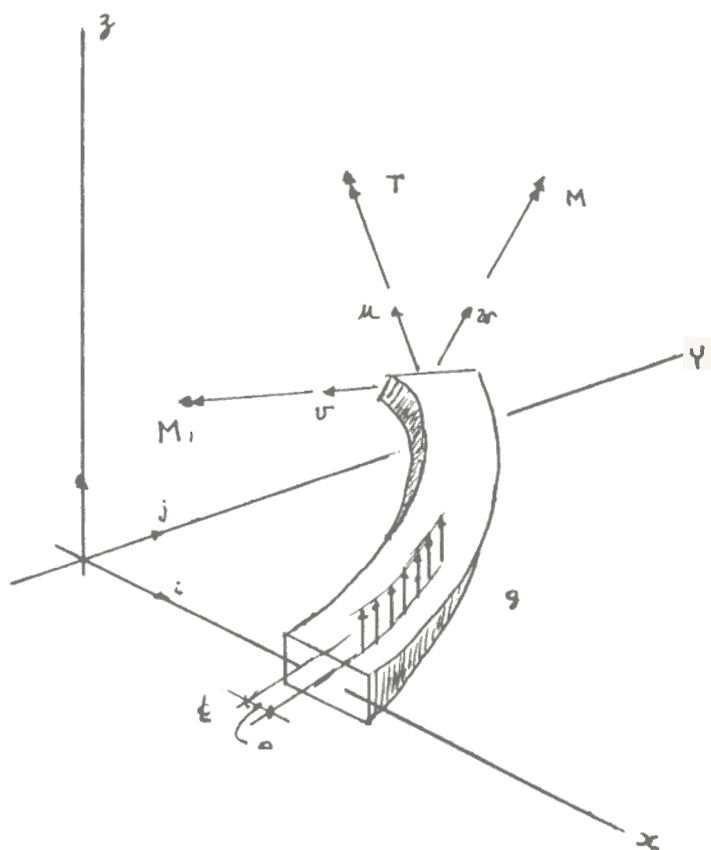


Fig 1-b

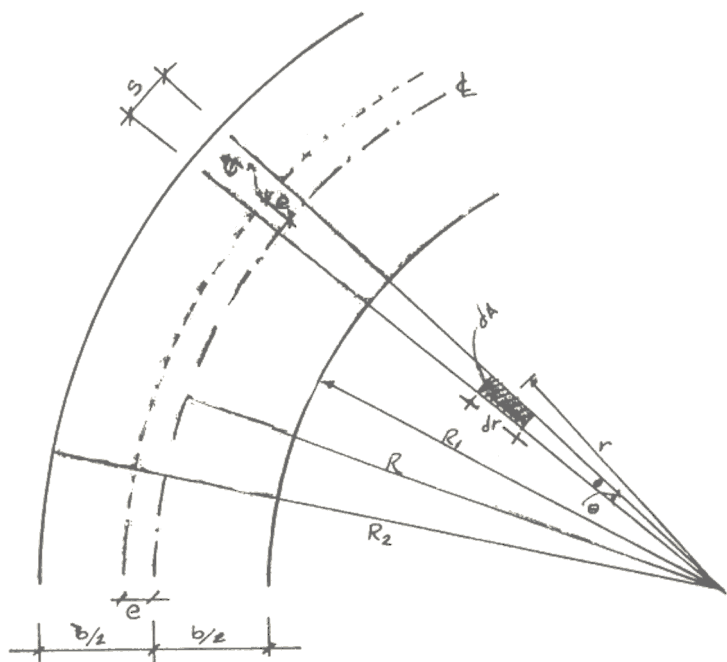


M_i R

M_i P g

T g R

Fig



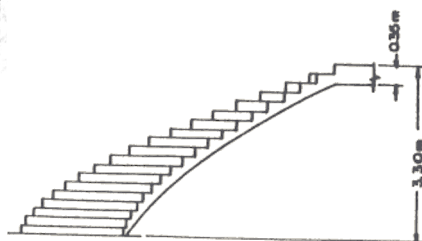
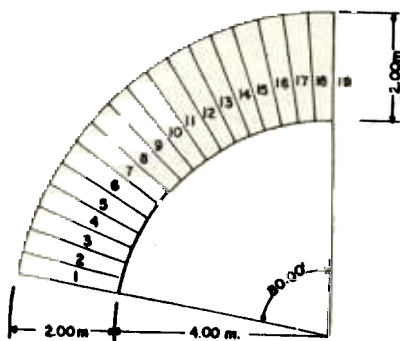
$$dA = s dr \quad \text{and} \quad G = R \cdot$$

$$G = \frac{\int r dA}{\int dA}$$

$$G = \frac{\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr}{\int_{R_1}^{R_2} r dr} \quad R \cdot b/2 \quad R = R$$

$$e = \frac{s^2}{12R}$$

F_{1G}



Ejemplo N° 5

"HELICOIDAL STAIRCASE STUDY" - A.R. CUSENS

$$t = 0.15 \text{ mts}$$

$$H = 3.30 \text{ mts}$$

$$b = 2.00 \text{ mts}$$

$$R = 5.00 \text{ mts}$$

$$e = 6.67 \text{ cms}$$

$$w = 1.70 \text{ T/mt}$$

$$f_c' = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 1280 \text{ kg/cm}^2$$

Programa HELICE
V. Custodio
D. Comarazamy

Proyecto == > Ejemplo Escalera Helicoidal #5

Helicoidal Staircase Study con excentricidad = .067 (A R Cusens)

=====

Viga Helicoidal con 1 Elementos, 2 Nudos y 2 Soportes

Módulo de Elasticidad = .2659E+07

Módulo de Cortante = .1139E+07

=====

Elemento No. 1 == del Nudo 1 al Nudo 2

Tipo == Curvo

Radio == 5.00

Alt. entre Nudos == 3.30

Angulo en Planta == 80.00 grados

Angulo entre eje

Local y Global == .00 grados

Carga Uniforme == -1.700 grados

Excentricidad == .07

Programa HELICE

Proyecto = = = > Ejemplo Escalera Helicoidal #5
Helicoidal Staircase Study con excentricidad = .067 (A R Cusens)

Desplazamientos medidos en referencia a los Ejes Globales de la Estructura

Nudo	Rotación sobre X	Rotación sobre Y	Rotación Sobre Z	Traslación en eje X-X	Traslación en eje Y-Y	Traslación en eje Z-Z
=====						
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.000E+00

Fuerzas Internas y Momentos a lo largo del Elemento No. = = > 1

Sección Grados	Fuerza Axial	Momento Torsor	Cortante Transv.	Momento Horiz.	Cortante Radial	Momento Lateral
=====						
.00	-7.85	.34	3.55	-.152	-6.65	-30.70
10.00	-6.03	.39	2.60	-.53	-7.52	-23.82
20.00	-4.09	.33	1.70	.09	-8.16	-16.27
30.00	-2.07	.18	.84	.44	-8.55	-8.25
40.00	.00	.00	.00	.55	-8.68	.00
50.00	2.06	-.18	-.84	.44	-8.55	8.25
60.00	4.08	-.32	-1.70	.09	-8.16	16.26
70.00	6.03	-.39	-2.60	-.53	-7.52	23.82
80.00	7.85	-.34	-3.55	-1.52	-6.65	30.70

Chequeo de equilibrio de nudos y reacciones de los soportes

Nudo	Suma Rot X	Suma Rot Y	Suma Rot Z	Suma Trasl X	Suma Trasl Y	Suma Trasl Z
1	1.52	12.81	-27.90	6.65	5.58	6.56
2	-12.88	.73	-27.90	-6.65	-5.58	6.56

Comparación de Resultados

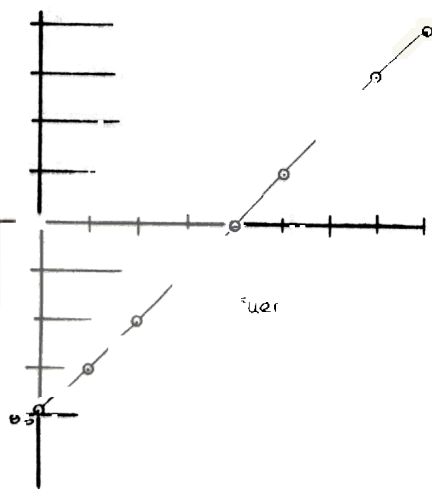
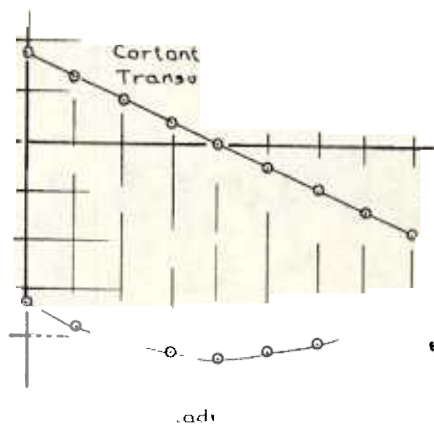
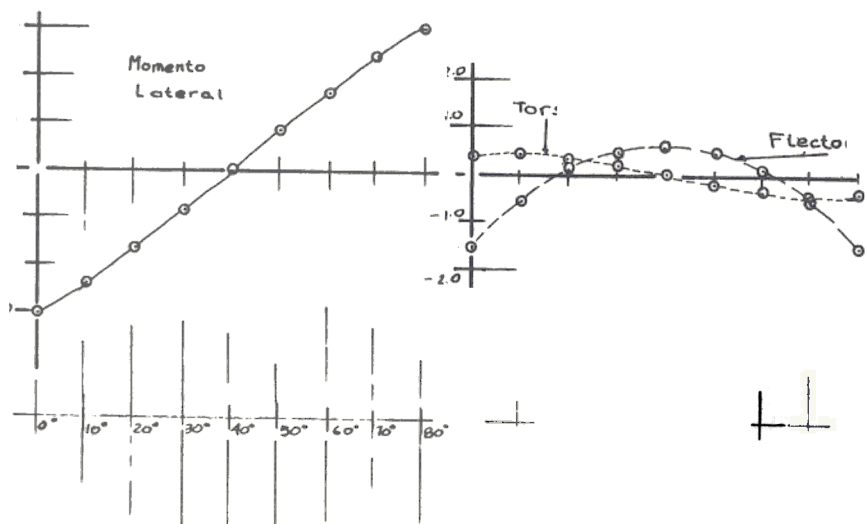
Ejemplo No. 5

(con excentricidad de 6.7 cms)

Ang desde el centro	Momento Lateral		Momento Horizontal		Momento Torsor	
(Grados)	(Kg-mt)		(Kg-mt)		(Kg-mt)	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
0	0	0	570	550		0
10	8140	8250	455	440	185	180
20	16050	16260	94	90	333	320
30	23500	23820	-554	-530	400	390
40	30290	30700	-1556	1520	338	340

(1) Scordelis

(2) HELICE



DISEÑO

Momento Horizontal

en extremos ----- 1.52 T-mt

$$A = \frac{1.52 \times 1000 \times 100}{1280 \times .874 \times 12} = 11.32 \text{ cm}^2$$

use 9 Ø 1/2"

$$A = 11.43 \text{ cm}^2$$

en centro ----- 0.55 T-mt

$$A = \frac{0.55 \times 1000 \times 100}{1280 \times .874 \times 12} = 4.07 \text{ cm}^2$$

$$\text{Cusens recomienda} \quad A = .0025bd = 6.00 \text{ cm}^2$$

use 9 Ø 3/8"

$$A = 6.39 \text{ cm}^2$$

Momento Lateral

máximo ----- 30.70 T-mt

$$A = \frac{30.7 \times 1000 \times 100}{1280 \times 185} = 12.97 \text{ cm}^2$$

use 5Ø 3/4"

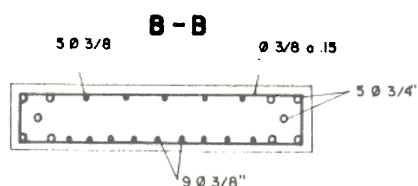
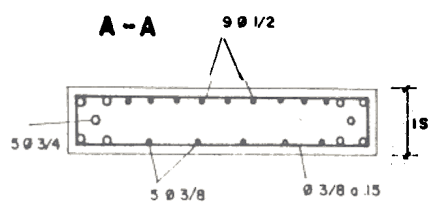
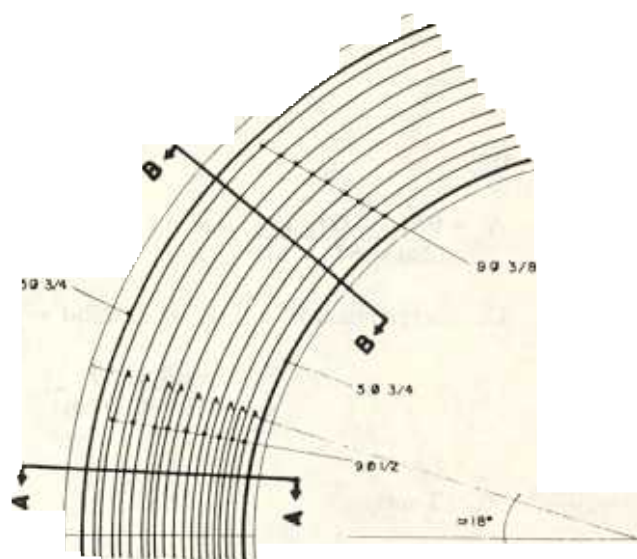
$$A = 14.25 \text{ cm}^2$$

Cortante Transversal

$$V' = 0.530 (f'_c)^{.05} = 6.98 \text{ kg/cm}^2$$

$$V' = V/(bd) = \frac{3.55 \times 1000}{200 \times 12} = 1.48 \text{ kg/cm}^2$$

use @ 3/8" .15



LITERATURA CITADA

1. Bergman, V. R. "Helicoidal Staircases of Reinforced Concrete". **Journal of the American Concrete Institute**, vol 28 No. 4, Oct 1956, págs. 403-412.
2. Scordelis, A. C. "Internal Forces in Uniformly Loaded Helicoidal Girders". **Journal of the American Concrete Institute**, vol 57 No. 4, Abril 1960, págs 1013-1026.
3. Morgan, V. A. "Comparison of Analyses of Helical Stairs". **Concrete and Constructional Engineering**, Marzo 1960.
4. Cusens, A. R. & Trirojna, S. "Helicoidal Staircases Study". **Journal of the American Concrete Institute**, No. 1 enero 1964, págs. 85-101.
5. Cusens, A. R. "Test on Helical Stairs". **Concrete and Constructional Engineering**, vol 59 No. 10, octubre 1964, págs. 357-364.
6. Cusens, A. R. & Santathadaporn, S. "Charts for the Design of Helical Stairs with Fixes Supports". **Concrete and Constructional Engineering**, vol 59 No. 2, febrero 1966, págs. 46-54.
7. Custodio, V. & Comarazamy, D. "Análisis Estructural de Elementos Helicoidales". **Tesis de Maestría en Ingeniería de Estructuras**. INTEC, Santo Domingo, mayo 1989.
8. Cusens, A. R. & Trirojna, S. "Helicoidal Staircase Study". **Journal of the American Concrete Institute**. Discussion by A. Scordelis, sept. 1964 vol 61 No. 9, págs 1191-1196.
9. Deschappelles, B. "Elementos Finitos". **Cátedras y notas**. Tomo I, INTEC, Santo Domingo, enero 1987.
10. Kardestuncer, H. **Introducción al Análisis Estructural con Matrices**, McGraw-Hill, págs 115-138.
11. Brebbia C. A. & Ferrante, A. J. **Computational Methods for the Solution of Engineering Problems**. Pentech Press, London, 3ra. edición, págs. 18-99.
12. Norris, C. H. & Wilbur, J. **Elementary Structural Analysis**. McGraw-Hill, 3ra. edición, págs. 295-307.
13. Kinney, J. S. **Indeterminate Structural Analysis**. Addison-Wesley Publishing Co., págs. 84-124.