CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIII, Número 2
Abril - Junio 1988

ALGEBRA

LEANDRA TAPIA DE DESTRO

Con el afirmarse del estudio del Algebra Abstracta, las estructuras algebraicas han adquirido una importancia notable en varias ramas de la ciencia, llegando a ser patrimonio común de estudiosos no sólo de matemáticas.

Bastará pensar en las significativas aplicaciones de la teoría de los grupos en las distintas disciplinas científicas. Incluso, la representación de grupos ha contribuído a la elaboración de la mecánica cuántica contemporánea y de la teoría de partículas elementales.

Sin entrar en particulares, recordamos que se trata de conjuntos en los cuales están definidas operaciones que satisfacen determinadas propiedades. Tales propiedades han sido individuadas mediante un proceso de abstracción, examinando las situaciones más comunes.

El Algebra Universal consiste en un ulterior proceso de abstracción: se propone, en efecto, el estudio en general de las propiedades de las estructuras algebraicas.

Recordamos, antes de nada, que una "operación" es una aplicación que hace corresponder a cada n-pla (ordenada) de elementos de un conjunto uno y sólo un elemento del mismo conjunto; n representa "la ariedad" de la operación (así, para $n = 2$ tenemos las operaciones binarias). Por motivos en los cuales no nos detenemos, se aceptan como operaciones con $n = 0$ las constantes, esto es elementos privilegiados del conjunto.

Sin introducir complicadas definiciones formales, podemos pensar en un álgebra (o álgebra universal o estructura algebraica) como un conjunto, llamado conjunto base, con operaciones definidas sobre él.

Es claro notar cómo con esta definición entran todas las estructuras algebraicas más notables.

Por ejemplo, los grupos pueden ser presentados o como álgebras dotadas de una única operación binaria con las bien conocidas propiedades o también como álgebras dotadas de tres operaciones: la ya citada binaria, más la operación unaria de pasaje al inverso y la operación O-aria (constante) dada por el elemento neutro.

Esta última presentación menos difundida a nivel didáctico, presenta notables ventajas en el estudio de los grupos en el ámbito de las teorías de los modelos y, más en general, de la lógica.

En la definicón de Algebra entran casos menos consuetudinarios; citamos, por ejemplo, los enteros positivos con las dos operaciones (binarias) de máximo común divisor y mínimo común múltiplo; agregamos que esta álgebra es un retículo distributivo.

Naturalmente, al enfrentar los distintos problemas del Algebra Universal, es oportuno considerar simultáneamente sólo álgebras "similares"; esto es, álgebras en las que aparecen operaciones de la misma ariedad y en igual número (aunque con propiedades diferentes): así un anillo, representado por las dos solas operaciones binarias es similar a un retículo, en cuanto también este último está dotado exactamente de dos operaciones binarias.

Los Polinomios

Sea A un álgebra con dos operaciones binarias, representadas por los símbolos Δ y 0 y con una operación unaria $'$. Es inmediata la posibilidad de componer entre ellas las operaciones dadas, obteniendo así nuevas operaciones: por ejemplo, si a, b, c representan elementos del álgebra A, se pueden considerar las siguientes escrituras: $(a \circ b) \Delta c$, $a' \Delta (b' \circ c)'$. Las últimas escrituras representan funciones (de ariedad 3 y 2 respectivamente) que asocian a n-plas de elementos de A otro elemento de A; tales funciones toman el nombre de **polinomios.** Más, en general se llaman polinomios sobre un álgebra, las aplicaciones que se obtienen al componer las operaciones bases.

A título de ejemplo, consideramos el caso de los anillos conmutativos, esto es de estructuras de dos operaciones binarias que indicamos con los símbolos + y . Se encuentran, por ejemplo: en los casos de ariedad 1 y 2, los polinomios de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i,\,j=1}^{n,\,m} x^i y^i$$

La expresión $(x^2+y)(x+z)$ es un polinomio según la definición vista: en efecto, en virtud de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, equivale a la expresión $x^3+x^2+xy+yz$ que es un polinomio aún en la usual terminología elemental. Por otra parte, una escritura como $3x + \sqrt{5}$ y no es un polinomio según nuestra definición dada, porque aparecen los números 3 y $\sqrt{5}$ que no son operaciones.

Desde el punto de vista del Algebra Individual, en este último caso se habla de **funciones algebraicas:** una función algebraica sobre un álgebra A es un polinomio en el que, en el lugar de algunas variables, aparecen elementos de A.

Recordamos que se llama identidad a la igualdad entre dos polinomios; una identidad del tipo $p(x_1,\dots,x_n) = q(x_1,\dots,x_n)$ es válida en el álgebra A si para cada $a_1,\dots, a_n \in A$ se tiene efectivamente que $p(a_1,\dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$.

Sub-álgebras, Productos directos, Cocientes

Nos proponemos mostrar cómo a partir de una o más álgebras se pueden construir otras estructuras.

Dada un álgebra A se dice que B es sub-álgebra de A si B es un sub-conjunto no vacío de A y es cerrado respecto a las operaciones bases; ésto es si cada operación, actuando sobre elementos de B, da como resultado, también, un elemento de B.

Si consideramos, por ejemplo, el conjunto de los números enteros, dotado de la operación de suma, los números impares no constituyen una sub-álgebra, porque la suma de dos números impares es un número par; si por el contrario consideramos como operación sólo el producto, los números impares forman obviamente una sub-álgebra.

El último ejemplo pone en evidencia, en particular, que el concepto de sub-álgebra depende de la estructura completa y no sólo del conjunto base de las álgebras en cuestión.

Notamos explícitamente que el concepto de subgrupo coincide con el de sub-álgebra de un grupo, sólo cuando este último viene representado como álgebra dotada de tres operaciones.

Consideremos el conjunto de los vectores de R^2 (aplicados en el origen). Es sabido cómo la operación elemental de suma (regla del paralelogramo) corresponde algebráicamente a la suma "Término a término" de las coordenadas, más precisamente la suma de los vectores correspondientes a las parejas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) es el vector asociado a la pareja (x_1+x_2, y_1+y_2). Se puede fácilmente generalizar la situación, considerando el producto cartesiano AXB (conjunto de todas las parejas ordenadas (a,b) con $a \varepsilon A$ y $b \varepsilon B$) de las álgebras similares. Podemos, en efecto, introducir operaciones entre parejas con el mismo procedimiento de composición término a término. Si con $*_A$ y $*_B$ se indican 2 operaciones en A y en B, respectivamente, se define la operación $*_{AXB}$ de la manera siguiente: $(a_1,b_1) *_{AXB} (a_2,b_2) = (a_1 *_B a_2, b_1 *_B b_2)$. Entran en este cuadro los productos directos de grupo, anillos, espacios vectoriales; se habla, en general, de **producto directo** entre las álgebras.

Se puede fácilmente generalizar la definición al caso de un número cualquiera de álgebras similares.

Para introducir un ulterior procedimiento que permite obtener nuevas álgebras, damos la noción de congruencia. Damos por conocido el concepto de relación de equivalencia sobre un conjunto; naturalmente, en el caso de un álgebra, tendrán particular interés aquellas relaciones de equivalencia que resulten compatibles con las operaciones bases.

Más precisamente, si R es una relación de equivalencia sobre un álgebra A, decimos que R es una **congruencia** si, para cada operación $f(x_1, ..., x_n)$ definida sobre A, tenemos que si $a_i R b_i$ para cada $i \leq n$ se sigue que $f(a_1, ..., a_n)\ R\ f(b_1, ..., b_n)$.

Por ejemplo, en el anillo de los enteros con las operaciones ordinarias de suma y producto, se considera la relación siguiente: $aR_n b$ S si a-b es múltiplo de un fijado entero $n \neq 0$, se ve fácilmente que es compatible con la operación de suma (en modo análogo se prueba la compatibilidad respecto al producto).

Sea $aR_n b$ y $cR_n b$ esto es $a = b + kn$ y $c = d + hn$. Sumando miembro a miembro, se obtiene: $a + c = (b+d) + (k+h)n$ y por consiguiente $(a+c)R_n(b+d)$.

Esta circunstancia permite definir una operación, estrechamente ligada a la suma, entre las clases de equivalencias relativas a las relaciones R_n. En efecto, si [a] y [c]son las clases de equivalencia, hagamos [a] [c]= [a+c] . En efecto la definición precedentes es válida porque si [a]= [b] y [c] = [d] entonces [a+c] = [b+d]. El resultado no depende del "representante" elegido para cada clase de equivalencia.

Examinamos el caso particular en que n=9: tenemos entonces [0] = [9k]

$[1] = [9k+1]$

$\dots \quad \dots$

$[8] = [9k+8]$

Se tiene, por ejemplo:

$[8] + [7] = [15] = [6]$ y $[5].[8] = [40] = [4]$. Entonces en el conjunto $\{[0], [1], \dots, [8]\}$ resultan definidas de manera natural las operaciones inducidas de la suma y del producto entre números enteros. En esta propiedad se basa la conocida "prueba del 9" veámoslo en un ejemplo.

Para verificar mediante la prueba del nueve el producto $56.13 = 728$, se procede así:

$5 + 6 = 11$ y $1 + 1 = 2$. Es fácil ver que $[56] = [11] = [2]$. Por otro lado $[13] = [1+3] = [4]$ en conclusión: $[2].[4] = [8]$ que coincide con $[728] = [7+2+8] = [17] = [8]$. Se recuerda que la prueba del 9 es una condición necesaria, pero no suficiente para que una operación esté correcta.

Sean A un álgebra y R una congruencia; siguiente el procedimiento análogo al visto, se obtiene un álgebra similar a A, que tiene como conjunto base las clases de equivalencia del conjunto A respecto a la relación R: formalmente se pone

$f\ [x_1], [x_2], \dots, [x_n] = [f\ x_1, x_2, \dots, x_n]$ para cada operación f y para cada $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$. Esta nueva álgebra viene indicada en la notación A/R y toma el nombre de cociente del álgebra respecto a la relación R.

Como ulterior ejemplo, consideramos el espacio vectorial R^2 y la relación M que asocia los vectores que tienen la misma ordenada. Es fácil ver que M es una relación de congruencia. El conjunto cociente está constituido de las rectas del plano paralelas al eje X; se introducen pues, las operaciones inducidas por las correspondientes operaciones en R^2. Así la "suma" de las rectas de ecuaciones $y=\alpha$ y $y=\beta$ resulta la recta de ecuación $y=\alpha+\beta$, mientras el "producto" del número real K por la recta $y=\alpha$ es la recta de ecuación $y=k\alpha$.

Hacemos notar explícitamente que en los grupos, en los anillos y en los espacios vectoriales las congruencias están en correspondencia biyectiva respectivamente con los subgrupos normales, los ideales y los subespacios vectoriales: este resultado no tiene carácter general ya que no es válido en cada álgebra.

Considerando los conceptos analizados en el precedente párrafo, se introducen tres operadores que juegan un papel muy importante en el estudio del Algebra Universal.

Teniendo un álgebra A (o un conjunto B de álgebras similares), llamamos S(A) [ó S(B)] al conjunto de las sub-álgebras de A (o de las sub-álgebras de álgebras de B).

Del mismo modo P(B) es el conjunto de los productos directos de álgebras de B, y H(B) es el conjunto de los cocientes de las álgebras de B.

Resulta inmediato probar que los operadores S, P, H son operadores cerradura (recordemos que un operador K se dice de cerradura si $X \subseteq KX$, de $X \subseteq Y$ se sigue que $KX \subseteq KY$, $KX = KKX$). Por tanto, puede considerarse la comparación entre los operadores.

Podemos entonces enunciar uno de los primeros resultados del Algebra Universal.

Teorema:

Para cada conjunto de álgebras similares X, HSPX está constituído por todas (y sólo éstas) las álgebras donde tienen validez las identidades que se satisfacen en cada álgebra de X.

Del análisis de este teorema se siguen interesantes conexiones entre el Algebra Universal y la teoría de los modelos, sobre todo en cuanto al estudio de la invariabilidad de ciertas fórmulas bajo oportunos operadores.

En definitiva, el Algebra Universal permite enfrentar y describir, en términos más generales, diversos tipos de situaciones: se alcanzan así definiciones unitarias y resultados cuyas demostraciones son a veces más simples que aquellas relativas a los distintos casos particulares.